Calcul d'intégrales par équations différentielles

Proposition : Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cos(xt)\,dx$ et $J(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\sin(xt)\,dx$ sont bien définies et valent : $I(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+t^2)^{1/4}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan t\right)$ et $J(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+t^2)^{1/4}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan t\right)$.

Soit $t\in\mathbb{R}$. Alors $x\mapsto\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cos(xt)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

De plus, $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cos(xt)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable en 0 et $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cos(xt)\underset{x\to\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ qui est intégrable en $+\infty$.

Donc, par comparaison, $x\mapsto\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cos(xt)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et I est bien définie sur $\mathbb{R}$.

comparaison avec des fonctions POSITIVES intégrables.

De même, J est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On peut alors définir pour tout $t\in\mathbb{R}$, $K(t)=I(t)+iJ(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}e^{itx}\,dx$.

Alors :
- $\forall t\in\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}e^{itx}$ est continue sur $]0,+\infty[$
- $\forall x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}e^{itx}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
- $\forall x\in]0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}e^{itx}\right)\right|=\left|ix\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}e^{itx}\right|=\underbrace{\sqrt{x}\,e^{-x}}_{}$ intégrable sur $]0,+\infty[$

car continue en 0 et $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$

Par théorème de dérivation sous le signe intégrale, K est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad K'(t)=i\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}e^{itx}\,dx=i\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{(it-1)x}\,dx$$

Or, par IPP,
$$K'(t)=\underbrace{i\left[\sqrt{x}\,\frac{e^{(it-1)x}}{it-1}\right]_0^{+\infty}}_{=0}-i\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{e^{(it-1)x}}{it-1}\,dx$$
$$=-\frac{i}{2(it-1)}K(t)$$

Ainsi K est solution sur $\mathbb{R}$ de $2(t^2+1)y'+(t-i)y=0$.

D'où $\forall t\in\mathbb{R}$, $K(t)=K(0)\exp\left(-\int_0^t\frac{x-i}{2(x^2+1)}\,dx\right)$

Or, $\int_0^t\frac{x-i}{x^2+1}\,dx=\int_0^t\frac{x}{x^2+1}\,dx-i\int_0^t\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-i\arctan t$

Et $K(0)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\underset{x=u^2}{=}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}$.

$$\Longrightarrow K(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{(1+t^2)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\arctan t}$$

On conclut en identifiant partie réelle et imaginaire.